CHƯƠNG 4: GIỚI HẠN
BÀI 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = 0$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$, có giới hạn là 0.

c) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Định lí 4.1

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Lưu ý

Định lí 4.1 thường được sử dụng để chứng minh một dãy số có giới hạn là 0.

Định lí 4.2

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Người ta chứng minh được rằng

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

b) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

c) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với mọi số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim \frac{1}{n} = 0$.

d) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a > 1$ cho trước.

Lưu ý

Cách ghi nhớ các kết quả bên như sau: Khi tử số không đổi, mẫu số càng lớn (dần đến dương vô cực) thì phân số càng nhỏ (dần về 0)

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Kí hiệu: $\lim u_n = L$.

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Lưu ý

a. Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$, có giới hạn là c.

b. $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ trên trục số thực từ điểm u_n đến L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn; nói một cách hình ảnh, khi n tăng thì các điểm u_n " chụm lại" quanh điểm L.

c. Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí

Định lí 4.3

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a) $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4.4

Giả sử $\lim u_n = L, \lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó

a) $\lim(u_n + v_n) = L + M$.

b) $\lim(u_n - v_n) = L - M$.

c) $\lim(u_n v_n) = LM$.

D) $\lim(cu_n) = cL$.

e) $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$$

III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC.

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim\sqrt{u_n} = +\infty$.

b) $\lim\sqrt[3]{u_n} = +\infty$

c) $\lim n^k = +\infty$ với một số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim n = +\infty$.

d) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Dã số có giới hạn $-\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = -\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Nhận xét:

a) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn n đủ lớn. Do đó $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn. Nói cách khác, nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

Lưu ý

Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

Định lí 4.5

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

Lưu ý

Ta có thể diễn giải "nôm na" định lí 4.5 như sau cho dễ nhớ: Khi tử số không đổi, mẫu số có giá trị tuyệt đối càng lớn(dần đến vô cực) thì phân số càng nhỏ(dần về 0).

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Lưu ý

Vì $-\infty$ và $+\infty$ không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cho các dãy số có giới hạn vô cực.

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$

$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

Lưu ý

Ở cả ba quy tắc, về dấu, tương tự như quy tác về dấu của phép nhân hoặc phép chia hai số.

Để cho dễ nhớ, ta diễn giải các quy tắc một cách "nôm na" như sau:

- **Quy tắc 1:** Tích của hai đại lượng vô cùng lớn là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 2:** Tích của đại lượng vô cùng lớn với một đại lượng khác 0 là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 3:** Khi tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0, mẫu thức càng nhỏ(dần về 0) thì phân thức càng lớn(dần về vô cực).

B. NỘI DUNG BÀI TẬP VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

DẠNG 1: BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1. Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 2. Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 3. Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 4. Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = 0$ nếu $q > 1$. **B.** $\lim q^n = 0$ nếu $q < 1$.

C. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| > 1$. **D.** $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 5. Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$. **C.** $\lim q^n = +\infty$ nếu $q < 1$.

B. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$. **D.** $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$

Câu 6. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $|q| \le 1$ thì $\lim q^n = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n v_n) = ab$.

C. Với k là số nguyên dương thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Câu 7. Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$. **C.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$. **B.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$. **D.** $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Câu 8. Biết $\lim u_n = +\infty$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{3}$. **C.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = 0$. **B.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{5}$. **D.** $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = +\infty$.

DẠNG 2: BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 9. $\lim\left(n^3-2n+1\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 10. $\lim\left(5n-n^2+1\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 11. $\lim u_n$, với $u_n=\dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

A. 0. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -7.

Câu 12. $\lim u_n$, với $u_n=\dfrac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 13. Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 14. Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}$, bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 15. $\lim\dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Câu 16. $\lim\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 17. Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=+\infty$.

Câu 18. $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 19. : $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 20. $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$ bằng :

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 21. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)$ bằng :

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 22. $\lim\left(5^n-2^n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 23. $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -5.

Câu 24. $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ bằng :

A. 1. **B.** 7. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Câu 25. $\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$ bằng :

A. 0. **B.** $\frac{6}{8}$. **C.** 36. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 26. $\lim\frac{2^n-3^n}{2^n+1}$ bằng :

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 27. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

A. $(\sin n)$. **B.** $(\cos n)$. **C.** $((-1)^n)$. **D.** $(\frac{1}{2})$.

Câu 28. Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

A. $((0,98)^n)$. **C.** $((-0,99)^n)$. **B.** $((0,99)^n)$. **D.** $((1,02)^n)$.

Câu 29. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n-1|<\frac{1}{n^3}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$.

C. $\lim u_n=-1$. **D.** Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số (u_n).

Câu 30. Giới hạn nào dưới đây bằng $+\infty$?

A. $\lim(3n^2-n^3)$. **C.** $\lim(3n^2-n)$. **B.** $\lim(n^2-4n^3)$. **D.** $\lim(3n^3-n^4)$.

Câu 31. $\lim\frac{(2n-1)^2(n-1)}{(n^2+1)(2n+1)}$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 32. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại

A. $\lim(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1})$. **C.** $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}$. **B.** $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{5^n}$. **D.** $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}$.

Câu 33. Để tính $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})$, bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:

Bước 1: $\lim(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})=\lim(\mathrm{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Bước 2: $\lim(\mathrm{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n}})=\lim n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Bước 3: Ta có $\lim n=+\infty$; $\lim(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})=0$.

Bước 4: Vậy $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})=0$.

Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 34. $\lim(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1})$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 35. $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng?

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 36. $\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}$ bằng?

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 37. Biết $\lim\frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{m}{n}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $m.n=10$. **C.** $m.n=15$. **B.** $m.n=14$. **D.** $m.n=21$.

Câu 38. Tìm $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$:

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{3}$.

DẠNG 3. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI

Câu 39. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1,\ u_{n+1}=\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n\ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

A. -1.　**B.** 2.　**C.** 4.　**D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1,\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$ với mọi $n\ge 1$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n=1$.　**B.** $\lim u_n=-1$.　**C.** $\lim u_n=\sqrt{2}$.　**D.** $\lim u_n=-\sqrt{2}$.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=2u_n+\dfrac{1}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Khi nó $\lim u_n$ bằng:

A. 0.　**B.** $-\dfrac{1}{2}$.　**C.** $-\dfrac{1}{2}$.　**D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 42. Cho dãy số (u_n) xác định $u_1=0$, $u_2=1$, $u_{n+1}=2u_n-u_{n-1}+2$ với mọi $n\ge 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 0.　**B.** 1.　**C.** $-\infty$.　**D.** $+\infty$.

DẠNG 4: TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Câu 43. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=2,151515...$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m,n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

A. $m+n=104$.　**B.** $m+n=312$.　**C.** $m+n=38$.　**D.** $m+n=114$.

Câu 44. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111...$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

A. $a-b=611$.　**B.** $a-b=-611$.　**C.** $a-b=27901$.　**D.** $a-b=-27901$.

Câu 45. Cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},...,(-\dfrac{1}{2})^{n-1},...$ có tổng là một phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$. Tính $m+2n$.

A. $m+2n=8$.　**C.** $m+2n=7$.　**B.** $m+2n=4$.　**D.** $m+2n=5$.

Câu 46. Phương trình $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\dfrac{5}{4}$, trong đó $|x|<1$, có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\dfrac{-7\pm\sqrt{97}}{24}\right\}$. **C.** $S=\left\{\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$. **B.** $S=\left\{\dfrac{-7+\sqrt{97}}{24}\right\}$. **D.** $S=\left\{\dfrac{-3+\sqrt{41}}{16}\right\}$.

Câu 47. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,…

A. $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $2a^2\sqrt{3}$.

DẠNG 5: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC

Câu 48. $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 49. $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 50. Tìm $\lim\left[(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})\right]$ ta được:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 51. $\lim\dfrac{n!}{(1+1^2).(1+2^2)...(1+n^2)}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 52. Cho dãy số (u_n). Biết $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\dfrac{3n^2+9n}{2}$ với mọi $n\geq 1$. Tìm $\dfrac{1}{nu_n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 53. $\lim\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{17}{100}$. **C.** $\frac{17}{200}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 54. Tổng $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 55. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 56. Tính $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 57. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1+2+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n=0$. **B.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **C.** $\lim u_n=1$. **D.** Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n\to+\infty$.

Câu 58. $\lim\frac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}$ bằng:

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 59. $\lim\frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 60. $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

DẠNG 6: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 61. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n-m}{5n+2}$, trong đó m là tham số. Để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì:

A. m là số thực bất kỳ.

B. m nhận giá trị duy nhất bằng 3.

C. m nhận giá trị duy nhất bằng 5.

D. Không tồn tại số m.

Câu 62. Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3})=2$.

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a-b=4$.

Câu 63. Tìm số thực a để $\lim\frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-2}}{5n+2}=2$.

A. $a=10$. **B.** $a=100$. **C.** $a=14$. **D.** $a=144$.

Câu 64. Tìm số thực a để $\lim(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5})=6$.

A. $a=2$. **B.** $a=4$. **C.** $a=6$. **D.** $a=8$.

Câu 65. Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3}-\text{a}\,n-b)=0$.

A. $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.C	4.D	5.A	6.A	7.A	8.C	9.D	10.B
11.B	12.C	13.B	14.C	15.A	16.D	17.B	18.B	19.C	20.A
21.A	22.C	23.A	24.B	25.A	26.C	27.D	28	29.D	30.A
31.C	32.D	33.D	34.D	35.B	36.B	37.B	38.D	39.B	40.C
41.C	42.D	43.A	44.B	45.A	46.A	47.C	48.A	49.A	50.B
51.A	52.B	53.C	54.B	55.A	56.C	57.B	58.A	59.A	60.B
61.C	62.D	63.B	64.C	65.A					

CHƯƠNG 4: GIỚI HẠN
BÀI 2.GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.

- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Lưu ý

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty$.

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;b)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=[0;+\infty)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm 0 mà $f(x)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f(x)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(x_0;b)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;x_0)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số $g(x)=\sqrt{1-x}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên trái.

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x^-_o} f(x)=\lim_{x\to x^+_o} f(x)=-\infty$$

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right] = -\infty$.

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L \pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right] = LM$; $\lim\limits_{x\to x_o}\left[cf(x)\right] = cL$ với c là một là một hằng số.

c) $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} (M \neq 0)$.

Lưu ý : Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = |L|$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $J \setminus \{x_o\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Lưu ý: Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_o$ bởi $x \to x^-_o, x \to x^+_o$.

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: $x \to x_o, x \to x^-_o, x \to x^+_o, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L = \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x)g(x) \right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Lưu ý: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L = \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g\left(x\right)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_o$).

Lưu ý: Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:

- Mẫu thức càng tang (dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).

- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

VI. Các dạng vô định: Gồm $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty$ **và** $\infty - \infty$**.**

B. Các dạng toán về giới hạn hàm số

***Dạng 1:* Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc**

Phương pháp:

- Xác định đúng dạng bài toán: giới hạn tại một điểm hay giới hạn tại vô cực? giới hạn xác định hay vô định?
- với giới hạn hàm số tại một điểm ta cần lưu ý: Cho $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.
- Với giới hạn hàm số tại vô cực ta "xử lí" tương tự như giới hạn dãy số.
- Với giới hạn xác định, ta áp dụng trực tiếp định nghĩa giới hạn hàm số, các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc về giới hạn vô cực.

Lưu ý: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y=f(x)$ không có giới hạn khi $x\to x_0$

- chọn hai dãy số khác nhau (a_n) và (b_n) thỏa mãn a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y=f(x)$ và khác x_0; $a_n\to x_0; b_n\to x_0$.
- Chứng minh $\lim f(a_n)\neq \lim f(b_n)$ hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ không tồn tại. TH $x\to x_0^{\pm}$ hoặc $x\to\pm\infty$ chứng minh tương tự.

B. NỘI DUNG BÀI TẬP

DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ, QUY TẮC.

Câu 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=1$ **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0$ **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+2}{x-2}=1$. **B.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+2}{x-2}=5$.

C. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+2}{x-2}=-1$. **D.** Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x\to3$.

Câu 4: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 5: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)$ bằng:

A. $+\infty$.   **B.** $-\infty$.   **C.** 3.   **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.   **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.   **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ không tồn tại.

Câu 7: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$.   **B.** $+\infty$.   **C.** -1.   **D.** 3.

Câu 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

A. $\dfrac{2017}{3}$.   **B.** $-\infty$.   **C.** $+\infty$.   **D.** 0.

Câu 9: Giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to2$ là

A. $+\infty$.   **B.** $-\infty$.   **C.** 3.   **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Câu 10: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$ ", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2,

Bước 3: $\lim\limits_{x\to2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

A. Bước 1.   **B.** Bước 2.   **C.** Bước 3.   **D.** Bước 4.

Câu 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$ bằng:

A. 0.   **B.** -3.   **C.** $-\infty$.   **D.** $+\infty$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ khi } x\ge1\\ x^2-3 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=7$.   **B.** $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-2$.

C. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=7$.   **D.** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=7$.

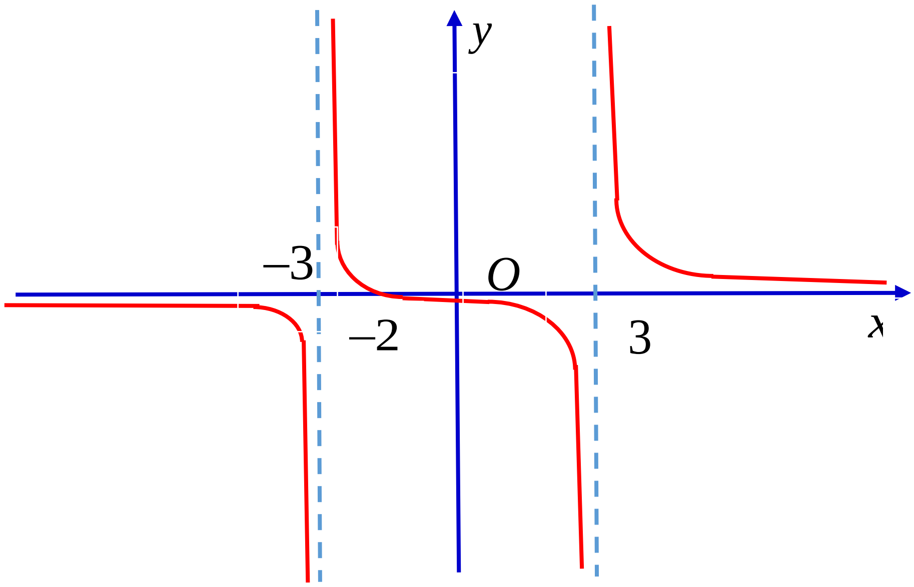
Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5} \text{ khi } x\ge 3 & \left(1\right)\\ \dfrac{x^2-5}{x+2} \text{ khi } x<3 & \left(2\right)\end{cases}$.

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f\left(x\right)$ có giới hạn khi $x\to 3$?

A. 19. **B.** 1.

C. -1. **D.** Không có số nào thỏa mãn.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$. **C.** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f\left(x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to3^-} f\left(x\right)$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để $B>7$ với $B=\lim\limits_{x\to1}\left(x^3+3x+m^2-2m\right)$.

A. $m<1$ hoặc $m>3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **C.** $-1<m<3$ **D.** $1<m<3$.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} \; khi\; x<1\\ \sqrt{2x-2} \; khi\; x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 17: Trong các hàm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm $x=1$?

A. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left|x-1\right|}$ **B.** $g\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **C.** $h\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ **D.** $t\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$

Câu 18: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 19: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-x^2+x+1\right)$.   **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+1\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x^3+2\right)$.   **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^5+2\right)$.

Câu 20: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$.   **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)$.   **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

Câu 21: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}$.   **B.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}$.   **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x-2)^4}$.   **D.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}$.

Câu 22: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$.   **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^3+2x^2}{\left(x^2-x+6\right)^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to3^-}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$.   **D.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2(2x-1)}{x^4+x+1}$.

Câu 23: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}$.   **B.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}$.   **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^3+2}$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=mx+\sqrt{9x^2-3x+1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to+\infty$.

A. $m=-3$ **B.** $m\neq-3$ **C.** $m\geq0$ **D.** $m<0$

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{0}{0}$

Lưu ý:

- Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp các định lí về giới hạn hữu hạn hay các quy tắc về giới hạn vô cực đã biết thì ta gọi đó là các dạng vô định.
- Kí hiệu các dạng vô định gồm: $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty$ và $\infty-\infty$. Để tính giới hạn dạng vô định ta phải biến đổi biểu thức của hàm số về dạng áp dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *"khử dạng vô định"*.

Câu 25: **Bài toán:**

Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc căn thức.

Phương pháp giải (tự luận)

- Phân tích tử và mậu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ nên $f(x)$ và $g(x)$ cùng có nghiệm $x=x_0$. Do đó ta phân tích được $f(x)=(x-x_0)A(x)$ và $g(x)=(x-x_0)B(x)$. Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$ và công việc còn lại là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$.
- Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

Lưu ý

Phân tích đa thức thành nhân tử:

- Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Khi đã biết $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$, ta sử dụng lược đồ Hooc-ne hoặc chia $f(x)$ cho $x=x_0$ được thương $A(x)$. Khi đó $f(x)=(x-x_0)A(x)$.
- Áp dụng kết quả: nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Tổng quát: nếu phương trình $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x^1+a_0=0$ có các nghiệm thực $x_1,\ x_2,...,x_m$ thì $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x^1+a_0=a_k(x-x_1)...(x-x_m)A(x)$, trong đó $A(x)$ là đa thức bậc $k-m$. Tuy nhiên, trong thực tế, ta dùng kết quả này khi có đủ k nghiệm thực, tức $m=k$. Trường hợp ngược lại nên dùng lược đồ Hooc-ne. (với phương trình bậc hai, bậc ba có thể dùng MTCT để tìm nghiệm)

Câu 26: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

A. 1. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 27: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}$ $\left(m,\ n\in\mathbb{N}^*\right)$, ta được kết quả:

A. $+\infty$. **B.** $m-n$. **C.** m. **D.** 1.

Câu 28: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=0$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=-\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Câu 29: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 30: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 31: Giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ khi $x\to 1$ bằng

A. $-\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{-a-2}{3}$. **D.** $\dfrac{2-a}{3}$.

Câu 32: Giả sử $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=L$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L=3$?

A. -6. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 12.

Câu 33: Cho a và b là các số thực khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** $\dfrac{a}{b}$. **D.** $\dfrac{b}{a}$.

Câu 34: Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$.		**B.** $\frac{2}{a}$.		**C.** $2a^2$.		**D.** $2a$.

Câu 35: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ bằng

A. $\tan a$.		**B.** $\cot a$.		**C.** $\sin a$.		**D.** $\cos a$.

Câu 36: Cho a và b là các số nguyên dương. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{5}{3}$. Tích ab có thể nhận giá trị bằng số nào trong các số dưới đây?

A. 15.		**B.** 60.		**C.** 240.		**D.** Cả ba đáp án trên.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\frac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}$, trong đó k là một số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của k để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0.

A. $k\in\mathbb{Z},k>3$.		**B.** $k\in\mathbb{Z},0<k<3$.		**C.** $k\in\mathbb{Z},k\ge 3$.		**D.** $k\in\mathbb{Z},0<k\le 3$.

Câu 38: Cho a là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương, $n\ge 2$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n}$.		**B.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{n}{a}$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{1}{n}$.		**D.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{1}{a}$.

Câu 39: Biết $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương.

Tổng $a+b$ bằng

A. 137.		**B.** 138.		**C.** 139.		**D.** 140.

Câu 40: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\frac{|3x+6|}{x+2}$

A. Bằng 3		**B.** Bằng –3		**C.** Bằng 0		**D.** không tồn tại

Câu 41: Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}$ bằng:

A. $3a^3$		**B.** $2a^3$		**C.** a^3		**D.** $4a^3$

Câu 42: Cho $C=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}$, m là tham số thực. Tìm m để $C=2$.

A. $m=2$		**B.** $m=-2$		**C.** $m=1$		**D.** $m=-1$

Câu 43: Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ thì $a+b$ bằng:

A. 2		**B.** –4		**C.** –6		**D.** 8

Câu 44: Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng:

A. $\dfrac{a}{2b}$ **B.** $-\dfrac{a}{2b}$ **C.** $\dfrac{2a}{b}$ **D.** $-\dfrac{2a}{b}$

Câu 45: Cho a,b,c là các số thực khác $0, 3b-2c\neq 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\frac{1}{2}.$$

A. $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{10}$ **B.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Câu 46: Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}$ bằng:

A. $m-n$ **B.** $n-m$ **C.** $\dfrac{1}{m-n}$ **D.** $\dfrac{1}{n-m}$

Câu 47: Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, bạn Bính đã trình bày bài giải như sau:

Bước 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}.$$

Bước 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-4}+1}=\dfrac{5}{2}.$

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1.$

Bước 4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}.$

Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 48: Biết $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m+n$ bằng:

A. 68 **B.** 69 **C.** 70 **D.** 71

Câu 49: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Khi đó $3m+n$ bằng:

A. 55		**B.** 56		**C.** 57		**D.** 58

Câu 50: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}$ bằng:

A. $-\infty$		**B.** $+\infty$		**C.** 0		**D.** 1

Câu 51: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$.		**B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.		**C.** $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$.		**D.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x^2-x-6)^2}{x^3+2x^2}$.

Câu 52: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác 0?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$.		**B.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{(x^2+1)(3-x)}}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.		**D.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Câu 53: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$.		**B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$.		**C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$.		**D.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$.

Câu 54: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào không hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-8}$.		**B.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$.		**C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.		**D.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

DẠNG 3: GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Câu 55: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{5-2x}$ bằng:

A. 0		**B.** $\dfrac{3}{2}$		**C.** $+\infty$		**D.** $-\infty$

Câu 56: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}$		**B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$		**C.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}$		**D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}$

Ví dụ 4 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng :

A. 2   **B.** -2   **C.** 1   **D.** -1

Câu 57: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng :

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 58: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng :

A. 6   **B.** 12   **C.** 18   **D.** 24

Câu 59: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.   **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$.   **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$.   **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$.

Câu 60: Trong các giới hạn hữu hạn sau đây, giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}$.   **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}$.   **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

Câu 61: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$.   **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{1+2x}$.   **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}$.   **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}$.

Câu 62: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$.   **B.** $\dfrac{2}{3}$.   **C.** $-\dfrac{2}{3}$.   **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 63: Cho a,b,c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5$.

A. $\dfrac{a-3b}{c}=5$.   **B.** $\dfrac{a-3b}{c}=-5$.   **C.** $\dfrac{a+3b}{c}=5$.   **D.** $\dfrac{a+3b}{c}=-5$.

Câu 64: Cho a và b là các tham số thực . Biết rằng $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{cx+1}-(ax+b)\right]=0, a$ và b thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây ?

A. $a+b=9.$ **B.** $a+b=-9.$ **C.** $a-b=9.$ **D.** $a-b=-9.$

Câu 65: Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}.$ **B.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+2}{1+2|x|}.$

C. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}.$ **D.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}.$

Câu 66: Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau.

A. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}.$ **B.** $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}.$

C. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}.$ **D.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}.$

Câu 67: Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}.$ **B.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}.$

C. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}.$ **D.** $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}.$

Câu 68: Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}.$ **B.** $\lim_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}.$

C. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}.$ **D.** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}.$

Dạng 4 : Dạng vô định $0.\infty$

Bài toán : Tính giới hạn $\lim_{x\to x_0}[u(x)v(x)]$ khi $\lim_{x\to x_0}[u(x)]=0$ và $\lim_{x\to x_0}[v(x)]=\pm\infty$

Phương pháp : Ta có thể biến đổi $\lim_{x\to x_0}[u(x)v(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\lim_{x\to x_0}[u(x)v(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ ra ngoài dâu căn, quy đồng mẫu thức …. Là đưa được về dạng quen thuộc.

Câu 69: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)$ bằng :

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $-\infty$

Câu 70: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 71: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}$ bằng:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $-\sqrt{2}$

Câu 72: Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}(x\sin\frac{1}{x})$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $+\infty$ **D.** Không tồn tại

Câu 73: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** Không tồn tại

Câu 74: Cho a là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}$.

A. bằng $-\frac{1}{a^2}$. **B.** là $+\infty$. **C.** là $-\infty$. **D.** không tồn tại.

Câu 75: Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là hữu hạn ?

A. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+1)\sqrt{\frac{x}{2x^4+x+1}}$.

Câu 76: Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-11}{x^3+1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^3-1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)\sqrt{\frac{x+1}{5x^3+2x+1}}$.

Câu 77: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$

Câu 78: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$

Dạng 5 : Dạng $\infty-\infty$

Bài toán : Tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=+\infty$ Hoặc tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)+v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=-\infty$

Phương pháp : Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc qui đồng để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

Câu 79: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Câu 80: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{13}{24}$ **B.** $\dfrac{7}{12}$ **C.** $-\dfrac{13}{24}$ **D.** $-\dfrac{7}{12}$

Câu 81: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to+\infty$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** -1 **D.** 3

Câu 82: Trong các giới hạn sau giới hạn nào là hữu hạn:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$.

Câu 83: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -3 **D.** -2

Câu 84: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}\right)$ là hữu hạn:

A. $a-4b=0$. **B.** $a-3b=0$. **C.** $a-2b=0$. **D.** $a-b=0$.

Câu 85: Cho n là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

A. $\dfrac{n}{2}$. **B.** $\dfrac{n-1}{2}$. **C.** $\dfrac{n+1}{2}$. **D.** $\dfrac{n+2}{2}$

Câu 86: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\, x>1\\ mx+2 & khi\, x\le 1\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3

Câu 87: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn.

A. $k=2$. **B.** $k\ne 2$. **C.** $k<2$. **D.** $k>2$.

Câu 88: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

Câu 89: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+\text{ax})=+\infty$ nếu.

A. $a\ge 1$. **B.** $a\le 1$. **C.** $a>1$. **D.** $a<1$.

Câu 90: Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-\sqrt{x^2+bx+2})=3$, thì tổng $a+b$ bằng

A. 2. **B.** -6. **C.** 7. **D.** -5.

Câu 91: Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{ax+b-}\sqrt{x^2-6x+2})=5$ số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 92: Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3})$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}+2x)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x})$.

Câu 93: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5})=-\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của m và n.

A. 135.   **B.** 136.   **C.** 138.   **D.** 140.

Câu 94: Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\dfrac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $a+2b=33$.   **B.** $a+2b=34$.   **C.** $a+2b=35$.   **D.** $a+2b=36$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.B	4.C	5.A	6.B	7.A	8.D	9.B	10.B
11.C	12.D	13.C	14.C	15.B	16.D	17.A	18.D	19.C	20.D
21.C	22.B	23.C	24.A	25	26.B	27.B	28.D	29.B	30.B
31.A	32.D	33.C	34.A	35.D	36.D	37.D	38.A	39.C	40.D
41.D	42.B	43.C	44.B	45.D	46.C	47.A	48.A	49.C	50.A
51.D	52.C	53.C	54.B	55.D	56.C.B	57.B	58.C	59.B	60.C
61.B	62.C	63.C	64.A	65.D	66.D	67.B	68.A	69.B	70.C
71.B	72.B	73.A	74.D	75.C	76.B	77.A	78.C	79.A	80.B
81.A	82.D	83.B	84.C	85.B	86.B	87.A	88.B	89.D	90.D
91.C	92.C	93.D	94.B						

CHƯƠNG 4: GIỚI HẠN
BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng $\left(a,b\right)$ và $x_0\in\left(a;b\right)$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

STUDY TIP

Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

Định nghĩa 2

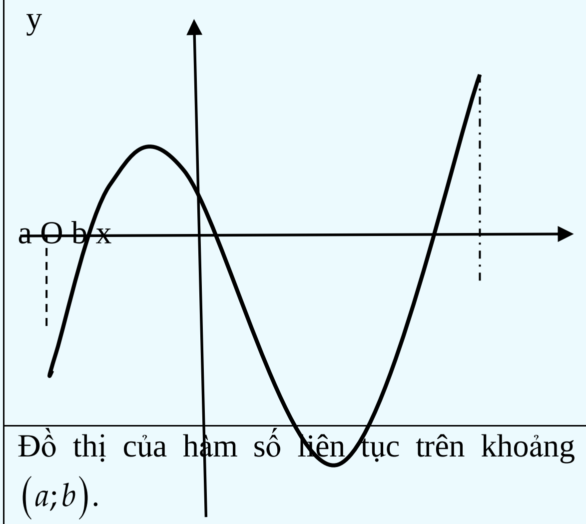
Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là ***liên tục trên một đoạn*** $\left[a,b\right]$ nếu nó liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=f\left(a\right)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f\left(x\right)=f\left(b\right)$

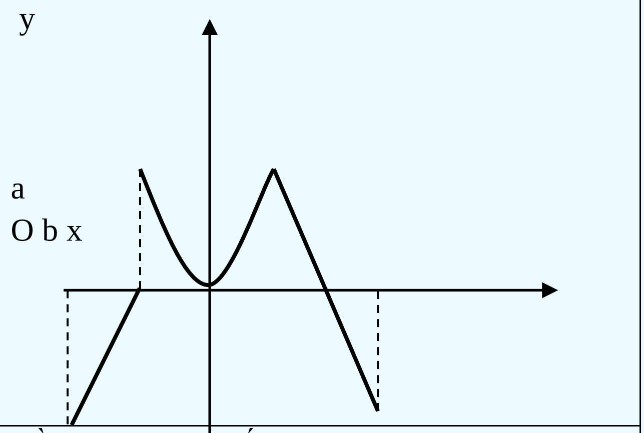
Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như $\left[a;b\right),\left(a;b\right],\left[a;+\infty\right),\left(-\infty;b\right]$ được định nghĩa một cách tương tự.

STUDY TIP

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó



Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$.



Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$.

Định lý 2

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_o. Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_o.

b) Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_o nếu $g(x) \neq 0$.

STUDY TIP

Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2. **Một số định lí cơ bản**

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lí 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Nói cách khác:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

STUDY TIP

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

- Chứng minh $f(a).f(b) < 0$.

B. NỘI DUNG BÀI TẬP

DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

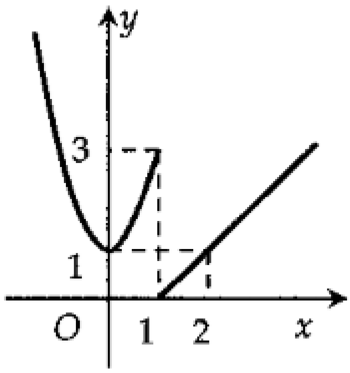
Phương pháp chung:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- Tính $f\left(x_0\right)$;
- Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\neq f\left(x_0\right)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Câu 1: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;3\right)$. **B.** $\left(2;3\right)$. **C.** $\left(-3;2\right)$. **D.** $\left(-3;+\infty\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

C. $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

D. $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;1\right)$, $\left(1;2\right)$ và $\left(2;+\infty\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{khi } x>5\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=7$. **B.** $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[5;+\infty\right)$. **D.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(5;+\infty\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+2 \text{ khi } x<-1\\ x^2-1 \text{ khi } x\ge -1\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-\infty;-1\right]$.

C. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;+\infty\right)$. **D.** $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-1$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} \text{ khi } x\ne 2\\ mx+1 \text{ khi x=2}\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 7: Chon hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\left(x-3\right)^2}}{x-3} & \text{khi } x\ne 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

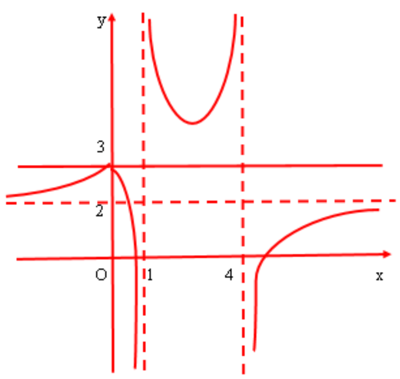
Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=5b$. **B.** $a=10b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=2b$.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=6$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số liên tục trên $(-\infty;4)$.

C. Hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$. **D.** Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Câu 11: Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & x>1\\ \dfrac{1}{4}, & x=1\\ \dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}, & x<1.\end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng:

A. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và không liên tục tại $x=1$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

C. $f(x)$ không liên tục tại $x=6$ và liên tục tại $x=1$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x} & khi\ x\neq 0\\ m-3 & khi\ x=0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=0$.

A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn. **B.** $m=5$.

C. $m=1$. **D.** $m\in\{1;5\}$.

Câu 13: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số sau liên tục tại $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}\sqrt[3]{bx+1}-1}{x} & khi\ x\neq 0\\ a+b & khi\ x=0\end{cases}.$$

A. $a+b=0$. **B.** $2a+b=0$. **C.** $3a+4b=0$. **D.** $3a+2b=0$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right) & khi\ x<1\\ m^3x+3-3m & khi\ x\geq 1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\{1;-2\}$. **C.** $m\in\{-1;2\}$. **D.** $m\in\{-1;-2\}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+6}-a}{\sqrt{x+1}-2} & khi\ x\neq 3\\ x^3-(2b+1)x & khi\ x=3\end{cases}$. Trong đó a và b là các tham số thực. Biết hàm số liên tục tại $x=3$. Số nhỏ hơn trong hai số a và b là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x\sin\dfrac{2}{x} & khi\ x>0 \\ a\cos x-5 & khi\ x\le 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=5$. **B.** $a=7$.

C. $a=\dfrac{11}{2}$. **D.** Không có giá trị nào của a thỏa mãn.

DẠNG 2. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp chung:

Một phương pháp chứng minh phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm trên khoảng $\left(a;b\right)$:

- Chứng minh hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.
- Chứng minh $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$.
- Từ đó kết luận phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $\left(a;b\right)$.

Để chứng minh phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm ta cần tìm được hai số a và b sao cho hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $\left[a;b\right]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn$\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right)>0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ không có nghiệm trong khoảng$\left(a;b\right)$.

B. Nếu $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $\left(a;b\right)$.

C. Nếu phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(a;b\right)$ thì hàm số $y=f\left(x\right)$ phải liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$.

D. Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, tăng trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right)>0$ thì phương trình $f\left(x\right)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $\left(a;b\right)$.

Câu 18: Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ $\left(1\right)$ trong đó a,b,c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình $\left(1\right)$ vô nghiệm với mọi a,b,c.

B. Phương trình $\left(1\right)$ có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c.

C. Phương trình $\left(1\right)$ có ít nhất hai nghiệm với mọi a,b,c.

D. Phương trình $\left(1\right)$ có ít nhất ba nghiệm với mọi a,b,c.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình: $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\{1;2\}$.	**B.** $m\in\mathbb{R}$.	**C.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.	**D.** $m\in\varnothing$.

Câu 20: Cho phương trình $x^4-3x^3+x-\frac{1}{8}=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 21: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x-+1=0$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 22: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\left(m^2-5m+4\right)x^5+2x^2+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$.	**B.** $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $m\in\{1;4\}$.	**D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm

$\left(2m^2-5m+2\right)(x-1)^{2017}\left(x^{2018}-2\right)+2x+3=0$.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.	**B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.	**D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 25: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\left(m^2-5m+4\right)x^5+2x^2+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$. **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $m\in\{1;4\}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm

$$\left(2m^2-5m+2\right)(x-1)^{2017}\left(x^{2018}-2\right)+2x+3=0.$$

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.D	4.B	5.C	6.D	7.A	8.B	9.C	10.D
11.A	12.A	13.C	14.B	15.B	16.A	17.D	18.B	19.B	20.D
21.D	22.D	23.A	24.D	25.D	26.A	27.D			